

УДК 539.376

**Е.В. Доля, канд. физ.-мат. наук***Киевский национальный университет строительства и архитектуры,***О.П. Червинко, канд. физ.-мат. наук***Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины***С.Н. Якименко, доц., канд. физ.-мат. наук***Кировоградский национальный технический университет*

## Термическая неустойчивость прямоугольной бесконечной металлополимерной призмы при антиплоском гармоническом сдвиге

В рамках связанной задачи термовязкоупругости с помощью численного моделирования исследована термическая неустойчивость при диссипативном разогреве прямоугольной призмы, которая состоит из медных и полиэтиленовых или полиметилметакрилатовых слоев. Призма подвергается высокочастотному силовому или кинематическому антиплоскому сдвигу. Установлено, что для случая полиэтилена термическая неустойчивость имеет место при силовом нагружении и отсутствует при кинематическом, а в случае полиметилметакрилата неустойчивость имеет место в обоих случаях нагружения. Это связано с наличием участков возрастания с температурой сдвиговой и объемной податливостей потерь для каждого из полимеров.

**вязкоупругий материал, виброразогрев, слоистая призма, термическая неустойчивость**

Диссипативный разогрев, с одной стороны, может существенно снижать работоспособность резинометаллических виброизоляторов транспортных средств и горных машин, а с другой, он является основой ряда технологий переработки полимеров и композитов на их основе, в частности, ультразвуковой сварки [7].

Математическое моделирование возникающих при этом термомеханических процессов производится в рамках связанной задачи термовязкоупругости [4].

У аморфных полимеров в окрестности температуры стеклования модуль накопления резко уменьшается, модуль потерь возрастает. Такое изменение свойств может вызвать резкий лавинообразный разогрев тела в окрестности температуры стеклования (т.н. явление тепловой неустойчивости [8]), что может приводить к потере функциональных свойств изделия вследствие размягчения или даже расплавления материала. Напротив, в технологиях ультразвуковой сварки термопластических полимеров режим тепловой неустойчивости обеспечивает максимальную эффективность процесса [6].

Тепловая неустойчивость призматической ячейки волокнистого композита изучена в работе [9]. Разогрев слоистой призмы при циклическом нагружении исследован в работах [1 - 3]. Постановка задачи и исследование виброразогрева циклически деформируемых вязкоупругих тел с температурно-зависимыми свойствами в упомянутых работах проведены в рамках задачи о плоской деформации для случая нормального и сдвигового нагружения прямоугольным штампом.

Постановка задачи и анализ случая сдвигового кинематического нагружения в антиплоской постановке рассмотрены в работе [1]. В данной работе решается задача о тепловой неустойчивости слоистой призмы в антиплоской постановке при силовом и кинематическом гармоническом нагружении штампом, приложенным к части поверхности.

**§1. Постановка и метод решения задачи.** Рассмотрим прямоугольную призму  $|x| \leq 2c$ ,  $0 < y < 2b$ ,  $-\infty < z < \infty$ , которая состоит из двух наружных и одного срединного слоев меди, толщиной  $\delta$  (рис.1). Будем считать, что колебания возбуждаются осциллирующим с амплитудой  $u_0$  в направлении оси  $Oz$  штампом на площадке  $y = 2b$ ,  $|x| \leq a$ .

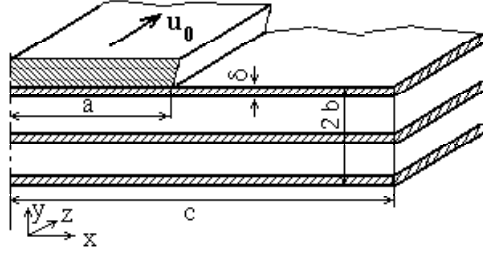


Рисунок 1 – Схема объекта

При антиплоской деформации отличной от нуля является только компонента вектора перемещения  $\tilde{u}_z = \tilde{u}_z(x, y)$ . При этом в призме возникает состояние сдвига в плоскости  $xOz$  и  $yOz$ .

Принимается обозначение  $\tilde{u}_z = \tilde{\psi}(x, y)$ . Отличные от нуля компоненты тензора деформации

$$\tilde{\epsilon}_{xz} = \frac{1}{2} \tilde{\psi}_{,x}, \quad \tilde{\epsilon}_{yz} = \frac{1}{2} \tilde{\psi}_{,y}. \quad (1)$$

Определяющие уравнения для напряжений записываются в виде

$$\tilde{\sigma}_{xz} = \tilde{G} \tilde{\psi}_{,x}, \quad \tilde{\sigma}_{yz} = \tilde{G} \tilde{\psi}_{,y}, \quad (2)$$

где  $\tilde{G}$  – комплексный модуль сдвига;

$$\tilde{G} = G' + iG'';$$

$G'$  и  $G''$  – модули накопления и потерь.

Средние за период колебаний скорость диссипации на единицу объема и ненулевые компоненты плотности потока энергии определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \overline{D'} &= \omega(\sigma''_{xz} \epsilon'_{xz} - \sigma'_{xz} \epsilon''_{xz} + \sigma''_{yz} \epsilon'_{yz} - \sigma'_{yz} \epsilon''_{yz}), \\ P_x &= \frac{\omega}{2} (\sigma'_{xz} u''_z - \sigma''_{xz} u'_z) dx, \\ P_y &= \frac{\omega}{2} (\sigma'_{yz} u''_z - \sigma''_{yz} u'_z) dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Краевая задача динамической связанной термовязкоупругости при гармоническом нагружении призмы в терминах функции  $\tilde{\psi}$  включает уравнения колебаний и теплопроводности

$$(\tilde{G} \tilde{\psi}_{,x})_{,x} + (\tilde{G} \tilde{\psi}_{,y})_{,y} + \rho \omega^2 \tilde{\psi} = 0, \quad c_v \dot{\theta} = (k \theta_{,x})_{,x} + (k \theta_{,y})_{,y} + \beta \overline{D'}, \quad (4)$$

граничные условия на границах, исключая поверхность нагружения  $|x| \leq a, y = b$ ,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\psi}_{,y}=0, \quad -k\theta_{,y}=\gamma(\theta-\theta_c), \quad a < |x| < c, \quad y=2b; \\
&\tilde{\psi}_{,x}=0, \quad -k\theta_{,x}=\gamma(\theta-\theta_c), \quad |x|=c, \quad 0 < y < 2b; \\
&\tilde{\psi}=0, \quad \theta=\theta_c \quad |x|\leq a, \quad y=0; \quad \tilde{\psi}_{,y}=0, \quad \theta=\theta_c \quad a < |x| < c, \quad y=2b,
\end{aligned} \tag{5}$$

а также начальное условие для температуры

$$\theta=\theta_0 \quad \text{при} \quad t=0. \tag{6}$$

На площадке нагружения ставится условие кинематического нагружения

$$\tilde{\psi}=u_o, \quad \theta=\theta_0 \quad |x|\leq a, \quad y=b \tag{7}$$

или силового нагружения

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \tilde{\sigma}_{yz}(x,b)dx = \bar{\sigma}_0, \quad \tilde{u}_z = \tilde{u}_{0z} \quad |x|\leq a, \quad y=b, \tag{8}$$

где  $\tilde{u}_{0z}$  – перемещение, отвечающее нагрузке  $N_0 = 2a\bar{\sigma}_0$ .

**§2. Анализ результатов численных исследований.** Граничная задача (1)-(8) решалась методом конечных элементов с помощью методики, развитой в работе [5]. В качестве материала призмы рассматриваются полиэтилен (ПЭ) и полиметилметакрилат (ПММА), которые являются типичными представителями кристаллических и аморфных полимеров. Физико-механические характеристики этих материалов приведены в работах [1, 9]. Кроме того, считалось, что  $a=10^{-2} \text{ м}$ ,  $c=3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $2b=2.2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $\delta=0.2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $\gamma=30 \text{ Вт/м}^2 \text{ град}$ ,  $\theta_0=20^\circ \text{ C}$ ,  $f=2\pi\omega=20 \text{ кГц}$ ,  $\beta=1$ .

Для расчета критических значений параметра нагрузки  $\sigma^*$  используется метод стационарных диаграмм, развитый в работе [8].

Силовое нагружение задается условием (8), а кинематическое – (7).

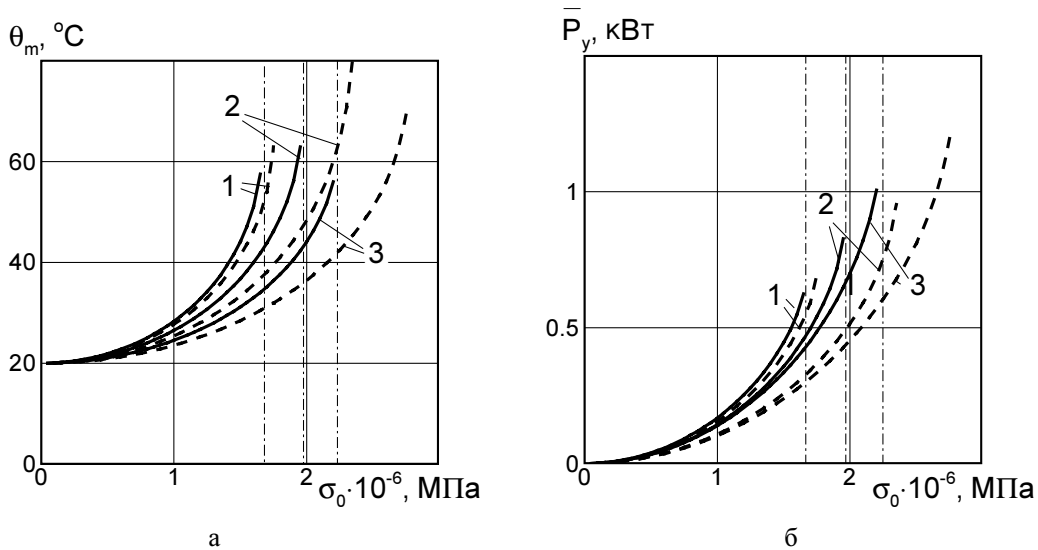


Рисунок 2 – Диаграммы  $\theta_m - \sigma_0$  (а),  $\bar{P}_y - \sigma_0$  (б) для задачи о силовом антиплоском сдвиге призмы из ПЭ

На рис. 2а для призмы из ПЭ сплошными линиями показаны диаграммы  $\theta_m - \sigma_0$ , где  $\theta_m$  – максимальная по объему температура. Видно, что при  $\sigma_0 \rightarrow \sigma^*$  резко нарастает усредненный по площадке нагружения поток энергии  $\bar{P}_y$ ,  $\bar{P}_y = \frac{1}{a} \int_0^a P_y(x, 2b) dx$ .

Здесь и ниже цифры 1, 2 и 3 отвечают таким задачам: 1 – однородная полимерная призма, 2 – призма с наружными полимерными слоями, 3 – призма с наружными и срединным металлическими слоями (рис. 1). При этом суммарная толщина призмы одна и та же  $0 < y < 2b$ .

Возникновение тепловой неустойчивости при возбуждении призмы в режиме заданных напряжений обусловлено наличием для ПЭ участка повышения податливости сдвиговых потерь при увеличении температуры.

Согласно кривым на рис. 2, при уменьшении величины полимерного слоя критические напряжения возрастают. Это объясняется увеличением сдвиговой жесткости и, следовательно, уменьшением потока энергии при уменьшении толщины полимерных слоев.

Для оценки эффектов динамичности рассчитывались резонансные частоты для температуры  $\theta = 20^\circ \text{C}$ . Для задач 1, 2 и 3 получены значения первых резонансных частот  $f_{r1} = 14 \text{ кГц}$ ,  $f_{r2} = 25,5 \text{ кГц}$  и  $f_{r3} = 26,4 \text{ кГц}$ . Влияние резонансов можно оценить путем сопоставления с квазистатическими решениями (штриховые линии на рис. 2а).

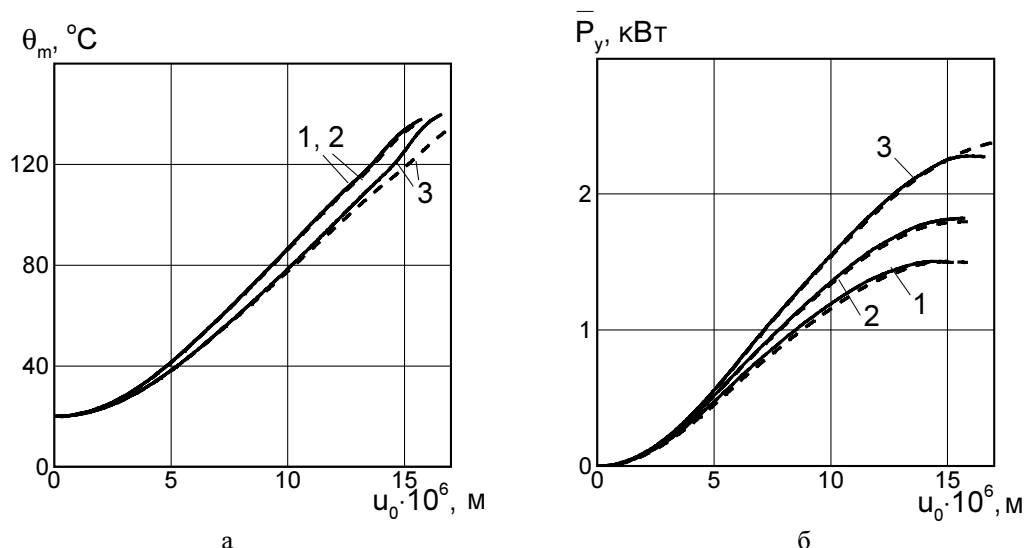


Рисунок 3 – Диаграммы  $\theta_m - u_0$  (а),  $\bar{P}_y - u_0$  (б), для задачи о кинематическом антиплоском сдвиге призмы из ПЭ

Диаграммы для случая кинематического нагружения полиэтиленовой призмы показаны на рис. 3. Кривые  $\theta_m - u_0$  не имеют вертикальных асимптот и сохраняют пологость до температуры плавления. Таким образом, для всех значений  $u_0$  в интервале  $(\theta_0, \theta_{liq})$ , где  $\theta_{liq}$  – температура вязкотекучего перехода, существует решение стационарной задачи теплопроводности, и, следовательно, тепловая неустойчивость не имеет места. Отсутствие тепловой неустойчивости при возбуждении призмы в режиме заданных перемещений обусловлено снижением сдвигового модуля потерь с увеличением температуры. При этом кривые зависимости  $P_y(u_0)$ , приведенные на рис. 3б, насыщаются при  $u_0 \approx 15 \text{ мкм}$ . Резонансы для армированной

призмы при кинематическом нагружении расположены несколько выше, чем в случае заданных напряжений ( $f_{r1} = 14,5 \text{ кГц}$ ,  $f_{r2} = 27,4 \text{ кГц}$ ,  $f_{r3} = 28,9 \text{ кГц}$ ) и при этом заметно отличаются от частоты нагружения  $f = 20 \text{ кГц}$ . Поэтому на кривых  $\theta_m - u_0$  отсутствуют эффекты динамичности типа резонансных бифуркаций.

Количественное влияние сил инерции оценивается сопоставлением с квазистатическими решениями (штриховые линии). Вдали от резонансов сдвиговая жесткость призмы возрастает с уменьшением толщины полимерного слоя. Поэтому при заданных перемещениях поток энергии  $\bar{P}_y$  для задачи 3 выше, чем для задач 1 и 2.

В однородной призме температура слабо локализована в окрестности граничной точки области нагружения  $|x| = a$ ,  $y = 2b$ . В задачах 2 и 3 локализация нивелируется наружными металлическими слоями. Максимальный разогрев имеет место в ПЭ слоях в области нагружения  $|x| \leq a$ .

Рассмотрим призму с прослойками из ПММА. Как указывалось выше, для этого полимера термическая неустойчивость возможна как в режиме заданного напряжения, так и перемещения.

Данные, отвечающие силовому и кинематическому антиплоскому сдвигу призмы из ПММА, показаны на рис. 4.

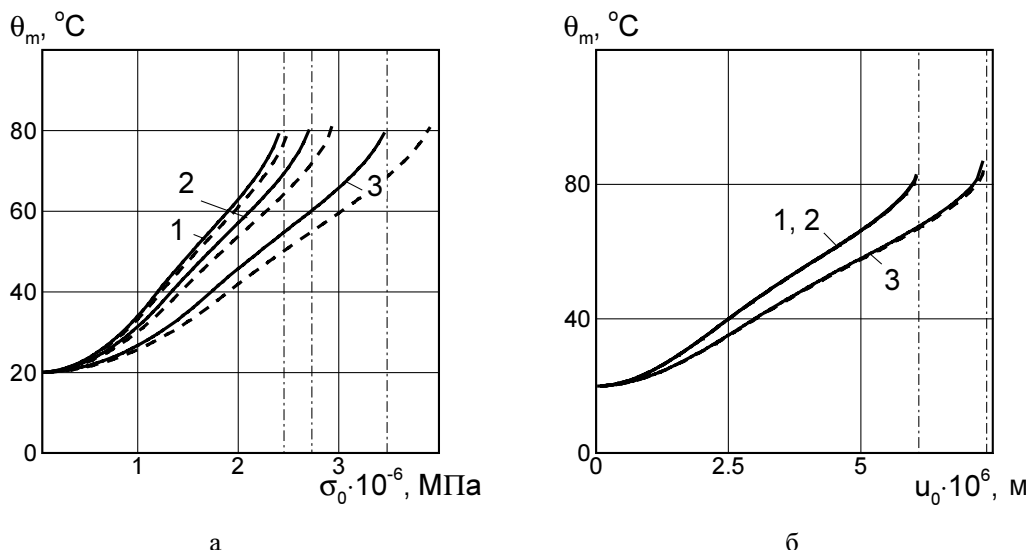


Рисунок 4 – Диаграммы  $\theta_m - \sigma_0$ , для задачи о силовом (а) и  $\theta_m - u_0$  – кинематическом (б) антиплоском сдвиге призмы из ПММА

Взаимное расположение кривых, отвечающих задачам 1–3, аналогично случаю ПЭ слоев. Значения критических температур  $\theta^*$  близко к температуре размягчения полимера  $\theta_p \cong 80^\circ \text{C} - 90^\circ \text{C}$ . Поскольку ПММА более жесткий полимер по сравнению с ПЭ, соответствующие резонансные частоты лежат заметно выше. Расчеты дают следующие значения резонансных частот для силового нагружения:  $f_{r1} = 15,4 \text{ кГц}$ ,  $f_{r2} = 25,1 \text{ кГц}$ ,  $f_{r3} = 26,4 \text{ кГц}$  и  $f_{r1} = 16,0 \text{ кГц}$ ,  $f_{r2} = 26,6 \text{ кГц}$ ,  $f_{r3} = 28,3 \text{ кГц}$  для кинематического нагружения. Поскольку резонансы заметно отстроены от частоты возбуждения  $f = 20 \text{ кГц}$ , они не оказывают качественного влияния на температурные диаграммы. Количественный эффект динамичности можно оценить сопоставлением со штриховыми кривыми, отвечающими квазистатическим задачам. Как и во всех

рассмотренных выше случаях нагружения, критические значения возрастают с ростом степени армирования призмы металлическими слоями.

### § 3. Выводы

1. При антиплоских колебаниях термическая неустойчивость реализуется в слоистой медно-полиэтиленовой прямоугольной призме при силовом высокочастотном нагружении сжатия, а в призме, составленной из слоев меди и ПММА, – как при силовом, так и кинематическом нагружениях. В этих случаях возможны режимы ускоренного разогрева, обусловленные возрастанием модулей или податливостей сдвиговых потерь с температурой.

2. Чем тоньше полимерные слои, тем выше критические значения амплитуд нагружения.

3. Для рассмотренных параметров задачи динамичность не оказывает качественного влияния на термическую неустойчивость. При этом увеличение степени армирования приводит к увеличению критических значений нагрузки.

### Список литературы

1. Доля Е.В. Колебания и виброразогрев пятислойной вязкоупругой призмы при антиплоском сдвиге // Теорет. и прикл. механика. – 2006. – 42. – С.177-181.
2. Доля Е.В. Расчет параметров тепловой неустойчивости слоистой призмы // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – 40. – С. 63-67.
3. Доля Е.В., Червинко О.П., Сенченков И.К. Тепловая неустойчивость слоистой вязкоупругой призмы при высокочастотном сдвиговом нагружении // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – 51, № 3. – С. 80-88.
4. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наук. думка, 1982. – 260с.
5. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. – К.: «А.С.К», 1987. – 264 с.
6. Нестеренко Н.П., Сенченков И.К. Моделирование виброразогрева армированных полимерных пленок при ультразвуковой сварке с нормальным вводом колебаний / Сб. Трудов II Межд. конф. «Математическое моделирование и информационные технологии в сварке и родственных процессах» Под. ред. проф. В.И.Махненко, 13-17 сент. 2004, пос. Кацивели, Крым. К.: ИЭС им. Е.О.Патона НАН Украины. – С. 200-204.
7. Сенченков И.К., Червинко О.П., Нестеренко Н.П. Математическое моделирование термомеханических процессов при ультразвуковой сварке слоистых композитов // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – 37. – С. 179-183.
8. Червинко О.П. Расчет критических параметров тепловой неустойчивости вязкоупругой призмы с концентратором напряжений при гармоническом сжатии // Прикл. механика. – 2004. – 40, №8. – С. 111-118.
9. Якименко Н.М. Теплова нестійкість в'язкопружної прямокутної призми з циліндричними вклученнями при зсувному циклічному навантаженні // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2004. – N 2. – С. 171-175.

В рамках зв'язаної задачі термов'язкопружності за допомогою чисельного моделювання досліджено термічну нестійкість при дисипативному розігріві прямокутної призми, яка складається з мідних і поліетиленових або поліметилметакрилатових шарів. Призма піддається високочастотному силовому або кінематичному антиплоскому зсуву. Встановлено, що для випадку поліетилену термічна нестійкість має місце за умов силового навантаження і відсутня при кінематичному, а у випадку поліметилметакрилату нестійкість має місце для обох типів навантаження. Це пов'язується із наявністю ділянок зростання з температурою зсувної і об'ємної податливостей втрат для кожного з полімерів.

Thermal instability under vibration heating of copper-polyethylene and copper-PMMA layered prism is studied within coupled thermoviscoelasticity using finite element simulation. The prism is subjected to a high frequency shear force or cinematic load. It is established that in the case of polyethylene the thermal instability occurs under force load and it does not take place under cinematic one. But for PMMA layers thermal instability takes place for both loads. This effect is associated with an existence of temperature interval of growing dependence of shear loss compliance and modules.